Kapitel 1

Größen und Einheiten

1.1 Einheiten rund um die Kraft

1. Eine mittlere Geschwindigkeit ergibt sich als Quotient einer zurückgelegten Strecke und der Zeit, in der diese Strecke zurückgelegt wurde. Welche Dimension und welche SI-Einheit hat also die Geschwindigkeit?

2. Besonders im Zusammenhang mit Autos und deren Geschwindigkeiten ist es üblich, Geschwindigkeiten in km/h auszudrücken. Drücken Sie 1 km/h durch SI-Einheiten aus.

3. Das erste NEWTONsche Gesetz (der Trägheitssatz) besagt, dass jeder Körper im Zustand gleichförmiger Bewegung verharrt, solange er keine Kraft erfährt. Das zweite NEWTONsche Gesetz (der Aktionssatz) besagt, dass die Kraft gerade dem Produkt aus träger Masse und Beschleunigung entspricht. Das dritte NEWTONsche Gesetz (der Reaktionssatz) besagt, dass jede Kraft ausgeglichen wird durch eine Gegenkraft, die gleichen Betrag hat, und der ersten Kraft gerade entgegengesetzt ist. Aus dem Aktionssatz lässt sich die Dimension und die SI-Einheit (ausgedrückt durch Basiseinheiten) der Kraft ableiten—welche sind es nämlich? Anmerkung: Die Kraft hat außerdem eine eigene kohärente abgeleitete SI-Einheit, das Newton, mit Einheitenzeichen N.

4. Im cgs-System wird die Einheit der Kraft ebenso gebildet wie im SI-System, nur dass nicht von kg, m und s ausgegangen wird, sondern von g, cm und s. Auch hier hat die Kraft eine eigene cgs-Einheit, das Dyn, mit Einheitenzeichen dyn. Drücken Sie 1 dyn in der SI-Einheit Newton aus.

1.2 Einheiten rund um den Druck

1. Druck hat die Dimension Kraft pro Fläche. Bestimmen Sie die Exponenten, durch die diese Dimension in den Dimensionen der Basisgrößen ausdrückt wird.

2. Druck hat eine eigene kohärente abgeleitete SI-Einheit, das Pascal, Einheitenzeichen Pa. Mechanische Spannungen haben dieselbe Dimension wie pneumatische oder hydraulische Drücke, werden jedoch zur Unterscheidung von diesen häufig auch mit

der Einheit N/mm^2 notiert. Drücken Sie 1 N/mm^2 durch Pa aus. Achten Sie auf das korrekte SI-Präfix.

3. Der normale Atmosphärendruck sind 1013.25 hPa. Diese Art, den Druck anzugeben, werden Sie aus dem Wetterbericht kennen. Dennoch ist sie entsprechend den Regeln des SI etwas skurril—vier Stellen vor dem Komma, bei Verwendung eines SI-Vorsatzes, der aus der Dreierstaffelung herausfällt. Bereinigen Sie diese Skurrilität und nennen Sie denselben Wert unter Verwendung eines SI-Vorsatzes, der so gewählt ist, dass die erste signifikante Ziffer direkt neben dem Dezimaltrennzeichen steht.

4. Für den Druck, der dem Atmosphärendruck entspricht, hat man früher die Einheit ata verwendet. Da viele Druckmessgeräte jedoch tatsächlich keinen absoluten Druck messen, sondern ein Druckgefälle zwischen Testvolumen (bspw. einem Reifen) und der umgebenden Atmosphäre, wurde für diese Differenzmessung eine eigene Einheit geprägt, das atü (Atmosphären Überdruck). Welcher Zahlenwert des Drucks ergibt sich bezogen auf die Einheit MPa, wenn das Messgerät 2.6 atü anzeigt?

5. 1982 wurde festgelegt, dass Angaben zu Eigenschaften bei Normalbedingungen nicht mehr zu beziehen sind auf den normalen Atmosphärendruck von 1013.25 hPa, sondern auf 1 bar. Das Bar ist seit 1948 als Einheit außerhalb des SI geführt. Es unterscheidet sich von der Atmosphäre dadurch, dass der Zahlenwert minimal (um 1.325 %) modifiziert wurde, um ein Umskalierung in SI-Einheiten zu ermöglichen, die nur eine Verschiebung des Dezimaltrennzeichens erfordert. Um wie viele Stellen ist das Trennzeichen zu verschieben? Drücken Sie 1 bar durch die entsprechende SI-Einheit aus. Anmerkung: Wie bei der Atmosphäre ist es auch beim Bar angeraten, explizit zu vermerken, ob absolute Drücke, oder relative Drücke gegen Umgebung gemeint sind. Eine Möglichkeit, das anzuzeigen, ist die Notation bar(a) und bar(g) (a für *absolute*, g für *gauge*).

6. Als ob wir auf dem Kontinent noch nicht genügend Konfusion mit dem Druck hätten, drückt das angloamerikanische System Drücke aus in psi (engl. *pounds per square inch*). Drücken Sie 1 psi in SI-Einheiten aus. Hinweis: Verwenden Sie zur Berechnung die Normfallbeschleunigung g_n.

Kapitel 2

Kinematik der Translation

2.1 Der Seefahrer

Ein Seefahrer fährt halb um den Globus, so dass, wenn man seine Ausgangsposition mit dem Erdmittelpunkt verbindet, und seine Endposition mit dem Erdmittelpunkt verbindet, beide Verbindungslinien gerade eine gemeinsame Linie bilden. Nehmen wir an, er sei von Sturm, Flaute usw. verschont geblieben (und konnte daher mit konstantem Betrag der Geschwindigkeit fahren), und musste auch nie einem Kontinent, einer Insel oder einem anderen Schiff ausweichen. Es gebe auch keinerlei Strömungen im Wasser. Er hat die kürzeste Route gewählt. Er hat für diese Reise ein halbes Jahr gebraucht. Hinweis: Nehmen Sie den Umfang der Erde wieder zu 40000 km an.

1. Schiffe haben historisch ihre Geschwindigkeit relativ zum Wasser gemessen, indem eine Logleine über dem Wasser abgerollt wurde, und die ausgebrachte Länge je Zeiteinheit bestimmt wurde. Diese so definierte Geschwindigkeit wurde in Knoten gemessen (die nämlich in die Logleine geknüpft waren). Wie viel Knoten würde der Seefahrer auf diese Weise gemessen haben?

2. Welche mittlere Geschwindigkeit ergibt sich zwischen Anfangs- und Endpunkt der Reise? Hinweis: es gibt hier einen Widerspruch zwischen der strikten Anwendung der Definition aus der Vorlesung, und dem Wert, den man mit dieser Frage realistischer Weise meist meinen wird.

2.2 Der Fährmann

Ein Fährmann kreuzt einen geradlinigen Fluss, der mit einer Fließgeschwindigkeit relativ zum Ufer von $v_W = 2$ m/s in Richtung Meer strömt. Der Fluss ist 50 m breit, die beiden Anlegestellen liegen genau gegenüber. Die maximale Geschwindigkeit, die die Fähre relativ zum Wasser erreicht, beträgt $v_F = 5$ m/s.

1. Angenommen, der Fährmann steuert seine Fähre exakt senkrecht zur Fließrichtung, d.h. er zielt am ersten Ufer exakt auf die gegenüberliegende Anlegestelle und hält diese Richtung bei, während er Fluss abwärts getrieben wird (sobald er die erste Anlegestelle verlassen hat, zielt er natürlich nicht mehr exakt auf die gegenüberliegende Anlegestelle). Er fährt mit voller Kraft; wie weit ist er Fluss abwärts getrieben, wenn er das gegenüber liegende Ufer erreicht? Machen Sie eine aussagekräftige Skizze!

2. Er erkennt seinen Fehler, und fährt nun genau in Fließrichtung Fluss aufwärts, wieder mit voller Kraft. Wie lange Zeit braucht er, bis er die angestrebte Anlegestelle erreicht?

3. Auf dem Weg zurück macht er es nun besser, und zielt nicht mehr auf die Anlegestelle, sondern dreht die Fähre ein wenig Fluss aufwärts. Wieder fährt er mit voller Geschwindigkeit. Welchen Winkel gegen die Fließrichtung sollte er einstellen, um exakt die erste Anlegestelle zu erreichen?

4. Wie lange braucht er, bis er sie erreicht?

Kapitel 3

Dynamik der Translation

3.1 Am Ende der Schiene

Ein Wagen rollt über eine Schiene, die plötzlich im freien Raum endet. Auf der Schiene hatte er sich geradlinig und gleichförmig fortbewegt, mit einer Geschwindigkeit $\mathbf{v}$. Die Fallbeschleunigung ist in negative z-Richtung orientiert. Startend mit dem Moment des Verlassens der Schiene ($t = 0$ und $\mathbf{r} = 0$) gilt also für die Geschwindigkeitskurve:

$$\mathbf{v}(t) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 - gt \end{pmatrix}$$

1. Geben Sie die Ortskurve an.

2. $v_1 = 1$ m/s, $v_2 = 2$ m/s, $v_3 = 1$ m/s, solange der Wagen auf der Schiene rollt. Wie groß ist der Betrag v_i dieser Geschwindigkeit des Wagens?

3. Zu welchem Zeitpunkt t_f beträgt der Betrag v_f der Geschwindigkeit gerade 3 m/s?

4. Wie weit ist der Wagen gefallen zum Zeitpunkt t_f?

3.2 Tödliche Kokosnüsse

2001 registrierte die ISAF [International Shark Attack File] weltweit 76 Hai-Angriffe, von denen fünf zum Tod führten. Dagegen werden jedes Jahr weltweit etwa 150 Menschen an Stränden von einer Kokosnuss erschlagen (Die Welt, 01.07.2002). Die Statistik hinter dieser Aussage wollen wir nicht prüfen, sondern die Frage, warum eigentlich relativ friedliche Kokosnüsse überhaupt tödlich sein können. Wir werden das betrachten, ohne explizit über Energien und Impulse nachzudenken. Wir unterstellen (ohne medizinische Begründung), dass es eine Kraft ist, die das Opfer tötet.

1. Nehmen wir eine relativ kleine Kokosnuss an, und nähern sie als Punktmasse von $m = 1$ kg. Wie groß ist die (statische, Gravitation) Kraft F_G im Schwerefeld, die auf diese Masse wirkt?

2. Nehmen wir weiter an, die Kokosnuss hänge in $r_0 = 10$ m Höhe in ihrer Palme. Sie löst sich zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ und stürzt (nach unten). Wie lang braucht sie, bis

sie am Boden angekommen ist (wie groß ist die Zeit t_1 bis der Ort $r_1 = 0$ erreicht wird)?

3. Wie schnell ist sie im Moment des Auftreffens auf den Boden? (offensichtlich funktioniert dasselbe Argument beim Auftreffen auf einen unter der Palme befindlichen Kopf, mit einem Unterschied von max. 2 m.)

4. Betrachten wir diesen Moment genauer. Da es nun den Boden gibt, kann sie nicht weiter fallen. Nehmen wir an, ihr Flug würde jäh unterbrochen an der Erdoberfläche, und zwar durch einen idealen, harten, plastischen Stoß (d.h. $v(t) \equiv 0$ und $r(t) \equiv 0$ für alle $t > t_1$). Formulieren Sie Orts- und Geschwindigkeitskurve für die Kokosnuss. Hinweis: die Kurven müssen abschnittsweise formuliert werden.

5. Formulieren Sie entsprechend den Argumentationen in der Vorlesung die Beschleunigungskurve und damit den zeitlichen Kraftverlauf.

6. Betrachten wir den Aufprall nicht mehr ganz so über-idealisiert. Nehmen wir an, der Boden sei dergestalt geschaffen, dass er durchaus deformierbar ist, aber mit folgender etwas eigenwilliger Charakteristik: Die Kraft, mit der er den Fall der Kokosnuss bremst, ist konstant, und gerade so groß, dass die Kokosnuss 1 mm weit (unter Einwirkung ständiger Wirkung dieser Kraft, ab dem Aufprall auf den Boden) in den Boden eindringt. Dann sei ihre Geschwindigkeit gerade wieder null. Formulieren und skizzieren sie für diesen Fall Orts-, Geschwindigkeits- und Beschleunigungskurve.

7. Vergleichen Sie die wirkende Kraft in diesem Fall mit dem Fall des idealen, harten Stoßes und mit der statischen Gravitationskraft.

8. Beschreiben Sie, welche Eigenschaften ein idealer Schutzhelm gegen plötzlichen Kokosnuss-Tod haben sollte. Welche Wandstärke ist mindestens notwendig, um eine dynamische Kraft äuqivalent der statischen Gewichtskraft einer 1000 kg Masse im Schwerefeld der Erde zu erhalten? (Nehmen wir an, das sei das Maximum, was ein Mensch überlebt.)

3.3 Weitsprung

Betrachten wir Weitsprung ein wenig vereinfacht. Der Athlet läuft, bis er eine bestimmte Geschwindigkeit v_0 in horizontaler Laufrichtung erreicht am Absprungort $\mathbf{r} = 0$. Im Moment t_0 des Absprungs lenkt er nun diese Geschwindigkeit um in eine möglichst günstige Richtung, um eben weit zu springen. Alle Technik liege in diesem Moment—und wir kümmern uns nicht um Details, wie die Bewegung in diesem Moment ihre Richtung ändert, und welche Probleme es dabei gibt. Statt dessen fragen wir uns, welche Richtung (Winkel α gegen die Horizontale) optimal ist im Moment des Abspringens.

1. Wählen Sie ein geschicktes Koordinatensystem, und formulieren Sie Orts- und Geschwindigkeitskurve des Athleten nach dem Absprung, zunächst für einen beliebigen Winkel, den er wählen könnte.

2. Berechnen Sie ausgehend von der gewählten allgemeinen Darstellung, wie lange der Athlet springt.

3. Berechnen Sie daraus, wie weit der Athlet springt.

4. Falls Ihre Darstellung den Winkel noch nicht explizit enthält, formulieren Sie um in eine Darstellung der Sprungweite abhängig vom Absprungwinkel α.

5. Welcher Winkel ist optimal, um möglichst weit zu springen?

6. Ausgehend von der Geschwindigkeit $v_0 = 5$ m/s, wie weit kann der Athlet maximal springen?

7. Der aktuelle Weltrekord im Weitsprung beträgt 8.95 m (Mike Powell, 30.08.1991). Nehmen wir an, das hier diskutierte Modell sei gültig. Wie schnell müsste Powell mindestens gelaufen sein vor dem Absprung?

8. Zum Vergleich, der Weltrekord über 60 m Sprint (die Länge des Anlaufs beim Weitsprung beträgt mindestens 40 m, ist also zumindest vergleichbar), beträgt 6.39 s (Maurice Greene, 03.02.1998). Welche mittlere Geschwindigkeit wurde hier erreicht? Erscheint Ihnen das beschriebene Modell vor dem Hintergrund dieser beiden Weltrekordleistungen plausibel?

Kapitel 5

Reibung

5.1 Flucht von Alcatraz

Nehmen wir an, Gefangene in Gefängnissen an Land würden durch eine Metallkugel an der Flucht gehindert, die sie hinter sich herziehen müssten. Die (Gleit-) Reibungskraft macht jeden Gedanken an Flucht unattraktiv. Die Gefägnisleitung von Alcatraz Penitentiary (das auf einer Insel liegt) überlegt sich nun, daß trockene Gleitreibung kein besonders sinnvolles Konzept ist, Gefangene zurückzuhalten, die durch die San Francisco Bay schwimmend flüchten würden. Statt dessen stellen sich um Fairneß bemühte Officers nun die Aufgabe, einen äquivalenten Widerstandskörper zu finden, dessen viskose Reibung in Wasser gerade der Gleitreibung besagter Metallkugel an Land entspricht. Um das Leben der Gefangenen nicht zu gefährden (die Officers sind nicht nur fair, sie schätzen auch Menschenleben), wählt man einen Schwimmkörper, der zwar vollständig eintaucht, einen Gefangenen aber nicht zum Ertrinken bringt (Prinzip des Treibankers).

1. Die Kugel (der Gefangenen an Land) habe einen Durchmesser von 15 cm und sei aus Blei gefertigt (Zeichen Pb von lat. *Plumbum*). Wie groß ist die Gewichtskraft F_g der Kugel im Schwerefeld der Erde?

2. Für ein blockiertes Autorad auf Pflaster findet man einen Gleitreibungskoeffizienten von $\mu_G \approx 0.5$, Blei auf Pflaster wird niedriger liegen. Nehmen wir an, bei etwa $\mu_G = 0.3$. Geben Sie die (trockene) Reibung der gleitenden Kugel $F_{R,C}(v)$ auf Pflaster an.

3. Nehmen wir diesen Wert also als Ziel an, den die viskose Reibung erreichen soll. Nehmen wir der Einfachheit halber weiter an, der Schwimmkörper sei eine Kugel, deren Radius wir nun bestimmen müssen. Hierzu müssen wir (bei viskoser Reibung) eine Annahme zur Geschwindigkeit des Häftlings machen. Die Distanz zur Küste, ausgehend von Alcatraz, beträgt 1.6 km (etwa die Distanz bis Fisherman's Wharf in San Francisco). Auf der am ehesten vergleichbaren Distanz im Wettkampfsport, 1500 m Freistil, liegt der Weltrekord bei 14 min und 34.14 s (Sun Yang, 31.07.2011)—unter idealen Bedingungen. Berechnen Sie diese mittlere Geschwindigkeit und nehmen Sie sie in den folgenden Teilaufgaben als Momentangeschwindigkeit v des Flüchtlings an.

4. Für welchen Radius r_S des Schwimmkörpers wird nun die viskose Reibung durch laminare Strömung gerade genau so groß wie die Gleitreibung aus Teilaufgabe 2?

5. Unter der vereinfachenden Annahme eines Widerstandsbeiwerts der Kugel von $c_W = 1$, welchen Radius r_N erhält man unter der Annahme turbulenter Strömung?

6. Berechnen Sie jeweils die REYNOLDSzahl ausgehend vom Radius r_S bzw. r_N, der sich für laminare bzw. turbulente Strömung ergibt.

7. Welches von beiden Szenarien ist daher realistischer? Wie groß müßte der Schwimmkörper abschließend gewählt werden?

5.2 Reibung bei Schienenfahrzeugen

Wir hatten in der Vorlesung eine Schnellfahrlokomotive aus den 30er Jahren betrachtet. Schon einiges früher versuchte man natürlich, hohe Geschwindigkeiten zu realisieren. Da bei Dampflokomotiven in der Regel keine Getriebe eingebaut wurden, mußten die Relativgeschwindigkeiten im eigentlichen Triebwerk durch große Antriebsräder reduziert werden. Aus Platzgründen trachtete man gleichzeitig danach, die Zahl der angetriebenen Achsen gering zu halten. Um das Gewicht der Maschine aufzunehmen, wurden weitere (Lauf-) Achsen installiert, die keine Antriebskraft übertragen und kleinere Rädern hatten. Betrachten wir einen Geschwindigkeitsweltrekord auf der Schiene, aufgestellt am 02.07.1907 mit 154.5 km/h von dem einzigen je gebauten Exemplar der Baureihe 15.

1. Die Achslast wird mit 16 t angegeben. Berechnen Sie unter Verwendung eines Haftreibungskoeffizieten $\mu_H = 0.15$ die maximal übertragbare Kraft je Achse.

2. Unter der Annahme, dass die gesamte induzierten Leistung von 2 200 PS bei einer Maximalgeschwindigkeit von 154.5 km/h auf die Schiene übertragen wird, wie viele Achsen müssen mindestens angetrieben werden?

3. Bislang haben wir angenommen, dass diese Leistung bei hoher Geschwindigkeit benötigt wird, wir haben aber noch nicht darüber geredet, wofür eigentlich. In der Ebene werden es verschiedene Formen von Reibung sein (Rollreibung, viskose Reibung in der Luft, etc.). Interessant ist jedoch auch der Fall, dass wir uns nicht in der Ebene befinden. Sobald die Lokomotive eine Steigung zu überwinden hat, gibt es eine klar identifizierbare Kraftkomponente, die sie aufbringen muß, nämlich die Hangabtriebskraft. Nehmen wir an, sie sei die einzige Kraft, gegen die die Dampfmaschine arbeitet. In welchem Winkel α gegen die Horizontale würde die Haftreibung von zwei Antriebsachsen (die tatsächlich realisiert wurden) noch ausreichen, um diese Lokomotive mit einer Gesamtmasse von 83.4 t zu bewegen, ohne dass die Antriebsräder durchdrehen? Drücken Sie diesen Winkel auch in der für Steigungen üblichen Verhältnisdarstellung aus (vertikale Distanz dividiert durch horizontale Distanz, d.h. Steigung $= \tan\alpha \cdot 100$ %).

4. Dieses Ergebnis überschätzt die realistischen Steigungen für Reibungsbetrieb auf Schienen deutlich. Ein Grund ist natürlich, dass wir noch nicht einbeziehen, daß ja auch eine Nutzlast m_N (=Zug) befördert werden soll. Nehmen wir 360 t zusätzliche Nutzlast an. Wiederholen Sie die Rechnung aus der letzten Teilaufgabe und geben Sie eine vorstellbare Steigung an.

5. Betrachten wir nun kurz den Kraft- und Leistungsbedarf an einer solchen Steigung. Berechnen Sie die Hangabtriebskraft an der in der letzten Teilaufgabe berechneten Steigung, unter Annahme der dort festgelegten Nutzlast.

6. Mit welcher Geschwindigkeit könnte die bisher betrachtete Lokomotive den 360 t-Zug über eine Steigung entsprechend Teilaufgabe 4 befördern?

7. Nehmen Sie an, für den Rollreibungskoeffizienten gelte $\mu_R = 0.001$. Welche Kraft ist erforderlich, um den gesamten Zug inkl. Lokomotive gegen die Rollreibung zu ziehen (in der Ebene)? Vergleichen Sie mit der in Teilaufgabe 2 berechneten verfügbaren Kraft.

Kapitel 6

Energieerhaltung und Arbeit

6.1 Rechenübung: Linienintegrale

l ist eine geschlossene Kreislinie um den Ursprung, die beschrieben wird durch $r_0^2 = x^2 + y^2$ mit $r_0 = 1$ m und $z = 0$. Sie wird im mathematisch positiven Sinn genau einmal durchlaufen, also gegen den Uhrzeigersinn und startend bei $x = r_0$, $y = z = 0$. Es ist:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{F_0}{r_0} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit $F_0 = 1$ N. Berechnen Sie die geleistete Arbeit entlang des beschriebenen Pfades in diesem Kraftfeld:

$$\int_{\mathcal{L}} \mathbf{F}(\mathbf{r})\ \mathrm{d}\mathbf{r}$$

Kapitel 7

Kinetische und Potentielle Energie

7.1 Rechenübung: Gradienten

Berechnen Sie den Gradienten (in kartesischen Koordinaten) für die folgenden Skalarfelder (mit $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$):

1. $f(\mathbf{x}) = ax_1^2 + bx_2x_3 + \frac{c}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}$
2. $f(\mathbf{x}) = \cos(x_1)\cos(x_2)\cos(x_3) + \sin(x_1x_2x_3)$

7.2 Auf der Suche nach dem Gleichgewicht

Eine Masse $m = 1$ kg befinde sich in konservativem Kraftfeld (nicht dem Erdschwerefeld!), das durch folgende potentielle Energie beschrieben wird:

$$E_{\text{pot}}(x, y) = E_0 \sin\left(\frac{x}{x_0}\right)\cos\left(\frac{y}{x_0}\right)$$

mit $E_0 = 1$ J und $x_0 = 1$ m. Das System sei abgeschlossen und nicht dissipativ.

1. Visualisieren Sie das Potential ohne die Hilfe von EDV.
2. Berechnen Sie die in diesem Potential wirkende Kraft an jedem Ort.
3. Geben Sie eine Bedingung an, die alle Orte beschreibt, an denen keine Kraft wirkt (Gleichgewicht). Hinweis: in dieser Bedingung treten zwei Parameter n und m auf, mit denen diese Punkte abgezählt werden.
4. Wir starten bei $t = 0$, $x = \frac{\pi}{2}x_0$ und $y = 0$ mit der Masse in Ruhe, $\mathbf{v} = 0$. Wie groß ist die Kraft auf die Masse? Was wird für $t > 0$ passieren? Welches ist die höchste Geschwindigkeit, die zu irgendeinem Zeitpunkt eingenommen wird?
5. Wir starten am selben Ort, mit $v_x = 1$ m/s und $v_y = 0$. Welches ist nun die höchste Geschwindigkeit, die zu irgendeinem Zeitpunkt eingenommen wird?
6. Wir starten am selben Ort, mit $v_x = v_y = 1$ m/s. Welches ist nun die höchste Geschwindigkeit, die zu irgendeinem Zeitpunkt eingenommen wird?

7. Wir starten nun am Ort $x = -\frac{\pi}{2}x_0$ und $y = 0$, wieder befindet sich die Masse anfänglich in Ruhe. Welches ist nun die höchste Geschwindigkeit, die zu irgendeinem Zeitpunkt eingenommen wird?
8. Wir starten wieder vom selben Ort wie in der vorangegangenen Teilaufgabe, allerdings mit $v = 1$ m/s startend. Welches ist nun die höchste Geschwindigkeit, die zu irgendeinem Zeitpunkt eingenommen wird?
9. Welche drei Arten von Gleichgewichten treten auf?

7.3 Im Gebirge

Ein Massepunkt mit $m = 1$ kg befindet sich in einer vulkanischen Landschaft, in der die Höhe $h(x)$ in Abhängigkeit der lateralen Raumrichtung x beschrieben wird durch:

$$h(x) = |x| \exp\left(-\frac{x^2}{x_0^2}\right) \quad \text{mit:} \quad x_0 = 1 \text{ km}$$

1. Skizzieren Sie diese Landschaft (ohne die Hilfe von EDV) als Höhenprofil.
2. Geben Sie das Skalarfeld $E_{\text{pot}}(x)$ an. Gehen Sie von Bedingungen wie auf der Erdoberfläche aus.
3. Geben Sie das Kraftfeld $F(x)$ an.
4. Geben Sie die Orte größten und kleinsten Betrags der Kraft an.
5. Der Massenpunkt startet bei $x = \infty$ mit 400 km/h Richtung Koordinatenursprung, entlang des gegebenen Höhenprofils. Wenn er sich auf 1 km diesem Punkt genährt hat und es keine Reibung gibt—wie hoch ist dann seine Geschwindigkeit noch?
6. Um sich an jedem Ort in dieser Landschaft ohne abzurutschen fortbewegen zu können, welcher Haftreibungskoeffizienten μ_H sollte mindestens gegeben sein?

7.4 Skispringer

Wir betrachten eine Ski-Sprungschanze. Sie habe, stark vereinfacht, die Form eines Parabelabschnitts:

$$p(x) = p_0 x^2 \quad \text{mit:} \quad p_0 = \frac{1}{10\,\text{m}}$$

im Bereich zwischen $x_0 = -10$ m und $x_1 = 2$ m. Der Skispringer startet auf der Rampe bei x_0 in Ruhe ($v_0 = 0$ bei $t_0 = 0$). Nachdem der Skispringer nun die Rampe bei x_1 verlässt, befindet er sich im freien Flug, bis er wieder auf dem Hang landet. Der Hang habe die funktionale Form:

$$h(x) = -h_0 x \quad \text{mit:} \quad h_0 = 0.3$$

Wir vernachlässigen während der gesamten Bewegung jegliche Reibung.

1. Skizzieren Sie die Situation, inkl. erwarteter Ortskurve (schematisch).

2. Berechnen Sie die Geschwindigkeit v_1 des Skispringers am Ort x_1.
3. Zerlegen Sie v_1 in eine Horizontal- und eine Vertikal-Komponente, v_{1x} und v_{1y}.
4. Berechnen Sie die Orts- und Geschwindigkeitskurve im Flug.
5. Berechnen Sie den Ort x_2, an dem der Skispringer auf dem Hang landet.
6. Berechnen Sie die Normal- und Tangentialkomponente der Geschwindigkeit v_2 bei der Landung, bezogen auf den Hang.
7. Betrachten Sie die Normalkomponente der Geschwindigkeit. Aus welcher Höhe müsste man aus der Ruhe springen, um exakt dieselbe Normalkomponente der Geschwindigkeit bei Landung auf einer waagerechten Oberfläche zu erfahren?

7.5 Passfahrt

An steilen Passabfahrten sieht man mitunter den Hinweis (besonders für LKW-Fahrer), man solle frühzeitig herunterschalten, um nicht die Bremsen zu überlasten. Betrachten wir eine solche Passfahrt und den Bremsprozess detaillierter.

1. Der LKW habe eine Masse von 7.5 t und fahre mit 80 km/h. Berechnen Sie seine kinetische Energie.
2. Er fährt nun, startend bei $t_0 = 0$ mit 80 km/h, eine Rampe hinab, die einen Höhenunterschied von 300 m überwindet. Berechnen Sie die potentielle Energie, die dabei frei wird.
3. Falls es keine dissipative Bremswirkung gibt, welche Geschwindigkeit hätte der LKW dann bei t_1 am tiefsten Punkt der Rampe?
4. Die Rampe habe eine konstante Steigung, so dass eine konstante Hangabtriebskraft wirkt. Falls der LKW bei $t_0 = 0$ oben startet und bei $t_1 = 90$ s unten ankommt, welche mittlere Beschleunigung hat er erfahren zwischen t_0 und t_1?
5. Welche Steigung (in Prozent angegeben) hatte daher die Rampe?
6. Nehmen wir an, der LKW-Fahrer würde nun gerade dergestalt (gleichmäßig) bremsen, dass er am Fuße der Rampe zum Stillstand kommt. Wieviel thermische Energie wurde in den Bremsen deponiert?
7. Betrachten wir nun die Bremsen. Nehmen wir an, die Bremsscheiben haben den halben Durchmesser der Räder, die auf der Straße abrollen. Berechnen Sie die zur Fahrstrecke s korrespondierende Strecke $\tilde{s}$, die die Bremsbeläge auf der Bremsscheibe zurücklegen.
8. Nehmen wir an, die Bremsen verhielten sich ideal gemäß trockener COULOMB-Reibung. Der (Gleit-) Reibungskoeffizient Bremsbelag auf Bremsscheibe sei $\mu_G = 0.65$. Vier Räder sind gebremst. Wie groß muss die Kraft sein, mit der der Bremsbelag gegen die Bremsscheibe gedrückt wird, damit die in Teilaufgabe 6 beschriebene Bremswirkung erzielt wird?

Kapitel 8

Schwerpunkt und Impulserhaltung

8.1 Rechenübung: Volumenintegrale

Berechnen Sie die Gesamtmasse einer Kugel mit Radius R, zentriert um den Ursprung, mit volumenbezogener Masse $\rho(r,\vartheta,\varphi) = \frac{r}{r_0}\rho_0 + \rho_1\frac{\varphi}{2\pi}$ mit ρ_0 und ρ_1 geeigneten Konstanten der Dimension ML^{-3}.

8.2 Schwerpunkt

Betrachten Sie einen Quader mit Kantenlängen $L_x = 10$ cm, $L_y = 20$ cm und $L_z = 30$ cm, wobei eine Ecke des Quaders im Ursprung liegt, und die drei Kanten jeweils exakt entlang der Raumrichtung orientiert sind (jeweils in positive Richtung), deren Buchstaben sie als Index tragen. Die volumenbezogene Masse des Materials, aus dem der Körper besteht, ist $\rho_0 = 8$ g/cm^3. In diesem Körper gibt es zwei kugelförmige Luftblasen (die Sie mit volumenbezogener Masse $\rho = 0$ annehmen dürfen) mit Radius je $R_{\text{Luft}} = 2$ cm an den Orten $\mathbf{r}_1 = (5,5,5)$ cm und $\mathbf{r}_2 = (5,10,10)$ cm. Es gibt aber auch einen würfelförmigen Einschluss (mit volumenbezogener Masse $\rho_{\text{Ein}} = 11$ g/cm^3), mit Kantenlänge $L_{\text{Ein}} = 1$ cm und Zentrum bei $\mathbf{r}_3 = (7,7,10)$ cm. Berechnen Sie den Schwerpunkt dieses Quaders.

8.3 Elastischer Stoß

Wir betrachten den linearen elastischen Stoß, unter Annahme von zwei beliebigen Massen m_1 und m_2. Die Masse m_1 erreicht bei $t = 0$ mit v_{1i} den Ursprung $r = 0$ (von $-\infty$ kommend), die Masse m_2 erreicht bei $t = 0$ mit v_{2i} den Ursprung (von $+\infty$ kommend). Die Indizes $_i$ und $_f$ bezeichnen den Zustand vor und nach dem Stoß (*initial* und *final*). Der Stoß findet also bei $t = 0$ statt. $s(t) = wt$ ist die Ortskurve des Schwerpunkts, in Koordinaten des Laborsystems. Wir betrachten das System in einer skalaren Darstellung.

1. w ergibt sich aus dem Gesamtimpuls und der Gesamtmasse, die sich mit dieser Geschwindigkeit bewegen. Wie groß ist w nämlich?

2. Geben Sie die Geschwindigkeiten $\tilde{v}_{ji}$ im Schwerpunktsystem an, ausgedrückt durch v_{ji} im Laborsystem und durch w.

3. Geben Sie die Geschwindigkeiten $\tilde{v}_{jf}$ im Schwerpunktsystem an, ausgedrückt durch v_{ji} im Laborsystem und durch w.

4. Geben Sie die Geschwindigkeiten v_{jf} im Laborsystem an, ausgedrückt durch v_{ji} im Laborsystem und durch w. Schreiben Sie w mit dem Ergebnis aus Teilaufgabe 1 noch einmal explizit aus.
5. Was passiert für $v_{1i} = -v_{2i}$ und $m_1 = m_2$?
6. Was passiert für $v_{1i} = 0$ und $m_1 = m_2$?
7. Was passiert für $v_{1i} = 0$ und $m_1 \to \infty$?
8. Was passiert für $v_{1i} = 0$ und $m_2 \to \infty$?

Kapitel 9

Wärme und Wirkungsgrad

9.1 Wassergräben für Dampflokomotiven

Ähnlich wie wir es für das Löschflugzeug gesehen haben, wurde auch zu einer wesentlich früheren Zeit bereits Wasser in der Bewegung durch einen Schnorchel aufgenommen. Konkret wurde das ab 1860 für Dampflokomotiven betrachtet, die einen enormen Bedarf an Frischwasser haben, so dass für Langstreckenfahrten die einzige Wahl darin bestand, regelmäßige Halte einzulegen, oder während der Fahrt Wasser aufzunehmen. Um für Schnellzüge diese Halte zu vermeiden, wurde eine Grube zwischen den Gleisen mit Wasser gefüllt, und ähnlich wie beim Löschflugzeug ein Schnorchel abgelassen.

1. Es wurde in Großbritannien mit diesem System experimentiert, und es wurde gefunden, dass die optimale Geschwindigkeit bei 45 mph liegt (*miles per hour*). Über eine Strecke von 440 yards ergibt sich eine aufgenommene Wassermenge von 944 Gallonen. Mit der selben Argumentation wie in der Vorlesung, welche Querschnittsfläche des Schnorchels wurde bei dieser Abschätzung vorausgesetzt? Wir setzen voraus, da es sich um eine alte britische Quelle handelt, dass *imperial gallons* gemeint sind. Für die Geschwindigkeitsangabe sind in gleicher Weise *statute miles* zugrunde zu legen, nicht die zuvor bereits besprochenen Seemeilen.

2. Ebenfalls bei dieser Geschwindigkeit, welche zusätzliche Leistung muss die Lokomotive erbringen, um nicht abgebremst zu werden durch die Wasseraufnahme? Gehen Sie für Wasser von einer volumenbezogenen Masse von $\rho_{\text{Wasser}} = 1\ \text{t/m}^3$ aus. Argumentieren Sie ausgehend von der Impulserhaltung in Fahrtrichtung.

3. Wiederholen Sie die Rechnung, diesmal ausgehend von der Energieerhaltung, unter Berücksichtigung der Änderung in kinetischer Energie des Wassers, wieder ausgehend von der Bewegung in Fahrtrichtung.

4. Beide Ergebnisse unterscheiden sich. Um das zu verstehen, betrachten wir ein Modell, in dem einzelne Wassermoleküle in den Wassertank gelenkt werden. Die Rate, mit der das geschieht, ergibt sich aus Dichte des Wasser, dem Molekülgewicht, der Geschwindigkeit des Zuges, etc. Wir betrachten aber nur ein *einzelnes* Molekül. Da es um dieselbe Menge Wasser geht in beiden Teilaufgaben, muss jeglicher Unterschied auch für dieses einzelne Molekül auftreten. Dieses Molekül trifft vollelastisch auf den Schnorchel, den wir als Reflektionsfläche im 45°-Gradwinkel zur Fahrtrichtung modellieren (die Fahrtrichtung sei x, die Vertikale sei z). Die Geschwindigkeit

der Fläche ist $v_0\mathbf{e}_x$, die Geschwindigeit des Moleküls vor dem Stoß ist $\mathbf{v}_i = 0$. Wie groß ist die Geschwindigkeit des Moleküls nach dem Stoß, $\mathbf{v}_s$? Hinweis: Es ist hilfreich, eine Galilei-Transformation auf den ruhenden Schnorchel auszuführen.

5. Berechnen Sie die gesamte kinetische Energie nach dem Stoß. Kommentieren Sie die Auswirkungen auf das zuvor aus der Energieerhaltung abgeleitete Ergebnis.

6. Kommentieren Sie die Auswirkungen auf die Impulserhaltung.

Kapitel 10

Kinematik und Dynamik der Rotation

10.1 Fallbeschleunigung und Satelliten

In der Diskussion der Fallbeschleunigung hatten wir zuvor nur die Einflüsse der Erdmasse und des Erdradius diskutiert und $g = GM_s/r_{\text{Erde}}^2$ geschrieben, wobei die Erde als Kugel angenommen wurde. Zusätzlich spielt die Erddrehung, und die einhergehende Zentrifugalkraft. Weiterhin ist zu beachten, dass die Erde keine Kugel ist. Betrachten wir beides quantitativ.

1. Verwenden wir für den Äquatorradius 6 378 km und für die Abflachung entlang der Polachse das Verhältnis 1:298 (Radiusreduktion gegenüber Äquator). Die Erdmasse beträgt $5.974 \cdot 10^{24}$ kg. Berechnen Sie ausgehend davon die Gravitationskraft auf eine Masse $m_s = 1$ kg am Äquator und am Pol.

2. Die Erde dreht sich in ca. 23 h 56 min 4.10 s einmal um ihre Achse. Berechnen Sie die daraus resultierende Zentrifugalkraft auf dieselbe Masse $m_t = 1$ kg am Äquator.

3. Wenn Sie nun sehr genau die Fallbeschleunigung g messen, welchen Wert erwarten Sie zu finden, basierend auf den bisherigen Ergebnissen am Pol und am Äquator?

4. Bei welchem Radius würden sich Zentrifugalkraft und Gravitationskraft gerade aufheben? Hinweis: Damit bestimmen Sie gerade die Flughöhe für eine sogenannte **geostationäre Umlaufbahn** von Satelliten.

10.2 Kippender PKW

Wenn man zu schnell in eine Kurve fährt, kann sich ein PKW überschlagen. Betrachten wir diese Situation kurz im Detail. Der PKW sei ein Quader mit einer Masse von $m = 1.5$ t, einer Breite von $2b = 2$ m und einer Länge von $2l = 4$ m. Die gesamte Masse liege konzentriert als Massenpunkt exakt im Zentrum der Standfläche, in $h = 50$ cm Höhe über der Straße. Der Überschlag bestehe im seitlichen Abrollen über die untere, seitliche Quaderkante am Außenrand der Kurve. $\mathbf{e}_z$ ist die Vertikale, $\mathbf{e}_x$ ist die Fahrtrichtung.

1. Geben Sie das Drehmoment an, das die (vertikale) Schwerkraft des Autos bezogen auf diese Drehachse ausübt (wie stets $g = 9.81$ m/s^2).

2. Geben Sie an, wie groß eine (horizontale) Querkraft F_k sein müsste, um dasselbe Drehmoment auf diese Drehachse auszuüben.

3. Das Auto fährt mit 100 km/h. Welchen Radius darf eine Kurve nicht unterschreiten, um einen Überschlag zu vermeiden?

4. Nehmen wir an, die Wahl enger Kurvenradien sei nur durch einen möglichen Überschlag begrenzt. Sie wollen möglichst schnell eine 180° Drehung fahren, also einmal wenden. Sie haben die freie Wahl bei Kurvenradius und Geschwindigkeit. Wie schaffen Sie es, möglichst schnell zu wenden?

10.3 Kinderkarussell

Wir betrachten ein Karussell, dessen Rotationsachse entlang der z-Achse durch den Ursprung geht. Genau in der xy-Ebene ist eine runde Plattform montiert, auf der ein Kind steht. Das Kind sei 1 m groß und habe eine Masse von 16 kg. Der Schwerpunkt liegt 70 cm über dem Boden (senkrecht stehend). Es steht anfangs, bei $t_0 = 0$, am Ort $x_0 = 1$ m und $y_0 = 0$ m (und $z = 0$). Das Karussell befindet sich zu diesem Zeitpunkt in Ruhe.

1. Das Karussell beschleunigt nun mit konstanter Winkelbeschleunigung $\alpha = 0.1$ rad/s^2. Welche Winkelgeschwindigkeit liegt zum Zeitpunkt $t_1 = 5$ s vor? An welchem Ort (in kartesischen Koordinaten!) befindet sich das Kind dann, wenn es sich relativ zur drehenden Plattform nicht bewegt hat?

2. Welche Strecke hat es zwischen den Zeitpunkten t_0 und t_1 zurückgelegt? Wie weit hat es sich aber nur von seinem Ausgangspunkt entfernt?

3. Welche Zentrifugalkraft empfindet das Kind zum Zeitpunkt t_1?

4. Damit es nicht umfällt, muss die resultierende Kraft aus Zentrifugalkraft und Schwerkraft durch die Körperachse des Kindes gehen. In welchem Winkel steht das Kind also gegen die Vertikale geneigt?

5. Berechnen Sie den Drehimpuls des Kindes bezogen auf die Rotationsachse des Karussells zum Zeitpunkt t_1 (Sie nehmen den Schwerpunkt des Kindes bei $r = 1$ m an, *obwohl* er natürlich eigentlich weiter innen liegt, da das Kind ja schief steht).

6. Nehmen Sie nun an, das Karussell behielte die Winkelgeschwindigkeit, die es bei t_1 erreicht hatte, für alle zukünftigen Zeiten (das ist eine äußere Zwangsbedingung). Das Kind läuft jetzt auf einen größeren Radius, nämlich $r = 2$ m. Wie groß ist dann der Drehimpuls des Kindes bezogen auf dieselbe Drehachse?

7. Nehmen Sie nun an, das Karussell würde zum Zeitpunkt t_1 freigelassen, d.h., die Zwangsbedingung von zuvor lassen wir fallen. Es gibt keine Reibung, aber wir tun auch nichts, um die Winkelgeschwindigkeit konstant zu halten. Wieder läuft das Kind von $r = 1$ m zu $r = 2$ m. Um nun die Drehimpulserhaltung sicher zu stellen, muss sich die Winkelgeschwindigkeit ändern. Auf welchen Wert nämlich?

8. Wieder ohne Reibung: was passiert, wenn sich das Kind (unter den selben Randbedingungen wie in der vorherigen Teilaufgabe) genau auf die Drehachse stellt?

9. Nehmen wir nun an, das Kind stehe wieder bei $r = 1$ m, ab t_1 gibt es keinen Antrieb mehr, wie zuvor, aber jetzt gibt es eine Reibung. Es handelt sich um eine trockene Reibung, weil das Karussel bei $r = 2$ m über einen Stahlring reibt. Wir nehmen an, die Normalkraft entspräche einer schweren Masse von 10 kg (der Rest des Gewichts liegt auf dem zentralen Lager, wo wir keine Reibung annehmen), der Gleitreibkoeffizient sei $\mu_G = 0.12$. Geben Sie $L(t)$ für $t > t_1$ an.

10. Zu welchem Zeitpunkt kommt das Karussell unter diesen Umständen wieder zur Ruhe?

Kapitel 11

Starre Körper

11.1 Eiskunstlauf

Wir hatten in der Vorlesung von Eiskunstläufern und Piroutten geredet. Schauen wir uns das einmal quantitativ an, und bilden uns ein Modell einer Eiskunstläuferin. Sie hat zwei Arme und Hände, deren Masse von je $m = 2$ kg wir als einzelne Punktmassen betrachten, deren Bewegungsradius R zwischen 20 cm und 60 cm variiert werden kann. Der Rest der Masse verteilt sich auf Kopf, Rumpf und Beine. Wir wollen hier nur geschwind eine Abschätzung machen, und vereinfachen die Läuferin daher massiv, nämlich zu einem Zylinder von $h = 160$ cm Höhe und $U = 60$ cm Umfang.

1. Berechnen Sie das angenommene Zylindervolumen, und unter der Annahme $\rho = 1$ kg/l die Masse M. Notieren Sie auch den Radius r.

2. Für das Trägheitsmoment des Vollzylinders um seine Symmetrieachse gilt, wie Sie in einer der folgenden Aufgaben berechnen werden, $J = \frac{1}{2}Mr^2$. Berechnen Sie das gesamte Trägheitsmoment, ausgehend von gestreckten Armen ($R = 60$ cm).

3. Berechnen Sie den Drehimpuls L bei einer vollen Drehung pro Sekunde.

4. Die Läufern zieht nun die Arme an ($R = 20$ cm). Unter Annahme von Drehimpulserhaltung, wie viele Drehungen pro Sekunde macht die Tänzerin nun?

11.2 Rolling Stones

Wir betrachten einen kugelförmigen Stein mit $d = 10$ cm Durchmesser und einer homogenen volumenbezogenen Masse von $\rho = 2800$ kg/m^3 (etwa Granit). Dieser Stein rollt oder gleitet einen Abhang herunter mit 100 % Steigung und einer schrägen Länge von 10 m. Wir betrachten, wie schnell er wird, abhängig davon, ob er nun rollt oder gleitet.

1. Geben Sie den Zusammenhang zwischen Winkelgeschwindigkeit ω und (translatorischer) Geschwindigkeit v an für den Stein, unter der Annahme, dass es keinen Schlupf gibt zwischen Umfang und Boden.

2. Geben Sie damit eine Gleichung an für die gesamte Bewegungsenergie (Translation plus Rotation), die nur die translatorische Geschwindigkeit v verwendet, also $E_{\text{bew}} = E_{\text{kin}}(v) + E_{\text{rot}}(v)$. Hinweis: Für den Teil $E_{\text{kin}}(v)$ ist nichts zu tun, der Teil wird ja stets durch v ausgedrückt.

3. Geben Sie den Unterschied in potentieller Energie im Erdschwerefeld mit $g = 9.81\ \mathrm{m/s^2}$ an, der sich zwischen Hoch- und Tiefpunkt der Schräge ergibt.

4. Davon ausgehend: Wie schnell ist der rollende Stein, wenn er unten ankommt?

5. Vergleichen Sie mit der Situation, dass die selbe Masse reibungsfrei und ohne zu rotieren nach unten gerutscht wäre. Welche Geschwindigkeit würde dann erreicht werden?

11.3 Schwungscheibe

Betrachten wir die Speicherung von Rotationsenergie in einer Schwungscheibe. Die Welle besteht aus einem Stahl mit 7.9 g/cm^3, hat 5 cm Durchmesser und eine Länge von 25 cm. Die Scheibe bestehe vollständig aus Gusseisen mit 7.2 g/cm^3. Auf die Stahlwelle aufgepresst ist der innere Teil der Schwungscheibe, ein Hohlzylinder mit 10 cm Länge, 5 cm Innendurchmesser und 10 cm Außendurchmesser. Der äußere Teil der Schwungscheibe ist ebenfalls ein Hohlzylinder mit 10 cm Länge, allerdings hat der nun 40 cm Innendurchmesser und 50 cm Außendurchmesser. Innen- und Außenteil sind durch sechs Speichen verbunden, die jeweils rund sind und 5 cm Durchmesser haben. Vernachlässigen Sie in der gesamten Aufgabe die tatsächlichen Übergänge zwischen Hohlzylindern und Speichen; nehmen Sie die Speichen als glatt abgeschnittene Vollzylinder von 15 cm Länge an. Verwenden Sie für das Trägheitsmoment eines Vollzylinders um seine Symmetrieachse:

$$J = \frac{1}{2}mr^2$$

mit m der Masse des Vollzylinders und r seinem Radius. Verwenden Sie für das Trägheitsmoment eines Zylinderstabes um eine Schwerpunktachse senkrecht auf der Symmetrieachse:

$$J = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{12}ml^2$$

mit m der Masse des Zylinderstabes, r dem Radius und l der Länge.

1. Berechnen Sie die Masse der Schwungscheibe inkl. Welle.

2. Berechnen Sie das Trägheitsmoment um die Symmetrieachse für einen Hohlzylinder mit Dichte ρ, r_i Innenradius, r_o Außenradius und h Höhe. Hinweis: Sie benötigen nur das bekannte Trägheitsmoment des Vollzylinders für diese Aufgabe. Es brauchen keine Volumenintegrale gelöst zu werden.

3. Berechnen Sie damit das Trägheitsmoment J_i für den inneren Hohlzylinder, J_o für den äußeren Hohlzylinder und J_w für die Welle.

4. Berechnen Sie das Trägheitsmoment J_s für eine einzelne Speiche um ihre Schwerpunktachse parallel zur Drehachse der Schwungscheibe.

5. Berechnen Sie davon ausgehend das Trägheitsmoment von sechs solchen Speichen um die Drehachse der Schwungscheibe. Hinweis: Verwenden Sie den Steinerschen Satz.

6. Geben Sie das Trägheitsmoment der gesamten Schwungscheibe an.

7. Welchen Durchmesser und welche Höhe müsste ein gusseisener Vollzylinder haben (vernachlässigen Sie hier auch die Welle), um bei gleicher Masse gleiches Trägheitsmoment bei Rotation um seine Symmetrieachse zu haben wie die zuvor betrachtete Schwungscheibe?

Kapitel 12

Elastizität

12.1 Schraubenfeder im Schwerefeld

Wir betrachten eine senkrecht hängende Schraubenfeder mit Federkonstante k, an der eine punktförmige Masse m in einem konstanten Schwerefeld mit Fallbeschleunigung g hängt. Nehmen Sie an, dass die Feder ohne angehängte Masse in der Höhe $h = 0$ in Ruhe ist. Positive Höhen liegen über diesem Punkt, negative Höhen darunter.

1. Wenn nun die Masse m angehängt wird, berechnen Sie, in welcher Höhe das System kraftfrei ist (also stabil).
2. Berechnen Sie die Veränderung der potentiellen Energie der Masse und vergleichen Sie mit der aufgenommenen Federenergie. Was fällt Ihnen auf?
3. Können Sie eine vollständige Energiebilanz aufschreiben (in der die Energieerhaltung gilt)?

12.2 Moduln

Wir nehmen einen Stahl mit folgenden Kennwerten an:

$$E = 200 \text{ GPa} \qquad G = 79.3 \text{ GPa}$$
$$K = 160 \text{ GPa} \qquad \mu = 0.292$$

1. Benennen Sie die vier Kennwerte und beschreiben Sie ihre Bedeutung. Geben Sie jeweils die definierende Formel an.
2. Wir betrachten einen Zylinder mit (unbelastet) Durchmesser $d_0 = 1$ cm und Länge $l_0 = 10$ cm, der aus dem genannten Material gefertigt wurde. Eine Kraft von $F = 1$ kN zieht an diesem Zylinder entlang der Länge l_0. Welche Kennwerte brauchen Sie, um die Antwort des Systems zu berechnen? Welche Geometrie hat der Zylinder während der Belastung?
3. Wir betrachten eine Kugel mit (unbelastet) Durchmesser $d_0 = 10$ cm, die aus dem genannten Material gefertigt wurde. Die Kugel wird in einem Gefäß einem gleichmäßigen Öldruck von 50 MPa ausgesetzt. Welche Kennwerte brauchen Sie, um die Antwort des Systems zu berechnen? Welche Geometrie hat die Kugel während der Belastung?

4. Wir betrachten einen Quader mit (unbelastet) Höhe $h_0 = 10$ cm, Breite $b_0 = 5$ cm und Tiefe $t_0 = 3$ cm. Eine Fläche $A_1 = b_0 t_0$ ist an einem Fundament befestigt, auf die gegenüberliegende Fläche $A_2 = b_0 t_0$ wirkt eine Kraft von $F = 1$ kN in Richtung der Kante t. Welche Kennwerte brauchen Sie, um die Antwort des Systems zu berechnen? Welche Geometrie hat der Quader während der Belastung?

Kapitel 13

Lagrange-Formalismus

13.1 Das rutschende Seil

Ein Seil der Länge L und der gleichmäßig verteilten Masse m (also mit einer längenbezogenen Masse von m/L) rutscht über eine Kante. Der Teil, der bereits über die Kante gerutscht ist, hängt senkrecht herunter, und es wirkt eine Schwerkraft auf ihn der Form $F_g = mg$, die ihn nach unten zieht. Dadurch wird das gesamte Seil langsam über die Kante gezogen und die für die Schwerkraft wirksame Masse wird zunehmend größer. Wir betrachten in diesem System keine Reibung. Wir verwenden die Methoden der LAGRANGE-Mechanik. Es ist alternativ auch ohne diesen Formalismus möglich—man kann auch anders auf die Bewegungsgleichung in Teilaufgabe 3 kommen.

1. Formulieren Sie die kinetische und die potentielle Energie des Seils, wobei Sie als Koordinate z den Teil der Länge wählen, der bereits über die Tischkante gerutscht ist (z zeigt also an, wie weit das Seil bereits runter hängt). Hinweis: Der Nullpunkt der potentiellen Energie spielt keine Rolle. Wählen Sie bspw. die Höhe des Tischs als Referenz. Dann sind alle potentiellen Energien, die sich beim Herunterrutschen ergeben, negativ—das muss Sie aber nicht bekümmern. Hinweis: Machen Sie sich für die Formulierung der potentiellen Energie zuerst klar, wieviel Masse herunterhängt (abhängig von z), und wählen Sie als z-Koordinate dieser Masse deren Schwerpunkt (Mittelpunkt in diesem Fall).

2. Formulieren Sie die LAGRANGE-Funktion.

3. Formulieren Sie die EULER-LAGRANGE-Gleichung für dieses Problem und bilden Sie die Ableitungen, die darin enthalten sind; vereinfachen Sie diese Bewegungsgleichung.

4. Geben Sie einen Lösungsansatz an. Achten Sie darauf, ihn so zu formulieren, dass sich zwei unabhängige Lösungen ergeben. Hinweis: Führen Sie eine Konstante $\tau \equiv \sqrt{L/g}$ ein um im Weiteren Schreibarbeit zu sparen.

5. Für $t_0 = 0$ und $z(t_0) = z_0$ und $v(t_0) = v_0$, geben Sie die Lösungstrajektorie $z(t)$ an. Hinweis: Bilden Sie hierzu eine Linearkombination der beiden Lösungen, die Sie zuvor gefunden hatten, mit allgemeinen Vorfaktoren a_1 und a_2, und lösen Sie dann nach diesen Faktoren auf.

6. Setzen Sie die so erhaltenen Werte von a_1 und a_2 in die allgemeine Lösung $z(t)$ ein und vereinfachen Sie. Hinweis: Verwenden Sie den Hyperbelsinus (*sinus hyperbolicus*) und den Hyperbelkosinus (*cosinus hyperbolicus*), um im letzten Schritt auf eine elegante Form zu kommen.

$$\sinh(x) \equiv \frac{\exp(+x) - \exp(-x)}{2} \qquad \text{und} \qquad \cosh(x) \equiv \frac{\exp(+x) + \exp(-x)}{2}$$

7. Für $v_0 = 0$ und $z_0 = 1$ m, sowie für $\tau = 1$ s (also 1 s$= \sqrt{L/g} \Leftrightarrow L = g$ s^2, also $L = 9.81$ m), zeichnen Sie die Ortskurve $z(t)$ für $t > 0$. Wählen Sie auf der Abszisse das Intervall $t = 0...2$ s.

Anhang A

Konstanten, Einheiten und Stoffwerte

A.1 Definierende Konstanten im SI

Bezeichnung	Zeichen	Zahlenwert	Einheit
Hyperfeinübergangsfrequenz des ^{133}Cs	$\Delta\nu_{\mathrm{Cs}}$	9192631770	Hz
Lichtgeschwindigkeit im Vakuum	c_0	299792458	m/s
Planck-Konstante	h	$6.626\,070\,15 \cdot 10^{-34}$	J s
Elementarladung	e	$1.602\,176\,634 \cdot 10^{-19}$	C
Boltzmann-Konstante	k_B	$1.380\,649 \cdot 10^{-23}$	J/K
Avogadro-Konstante	N_A	$6.022\,140\,76 \cdot 10^{23}$	1/mol
Photometrisches Strahlungsäquivalent	K_{cd}	683	cd sr/W

A.2 Konstanten

Bezeichnung	Zeichen	Zahlenwert	Einheit
reduzierte Planck-Konstante	$\hbar$	$1.054\,571\,817... \cdot 10^{-34}$	J s
Rydberg-Konstante	R_∞	$10.973\,731\,568\,160(21) \cdot 10^{6}$	1/m
elektrische Feldkonstante	ϵ_0	$8.854\,187\,8128(13) \cdot 10^{-12}$	F/m
magnetische Feldkonstante	μ_0	$1.256\,637\,062\,12(19) \cdot 10^{-6}$	H/m
allgemeine Gaskonstante	R	8.314462618...	J/(mol K)
Gravitationskonstante	G	$6.674\,30(15) \cdot 10^{-11}$	$\mathrm{m^3/(kg\,s^2)}$
Normfallbeschleunigung	g_n	9.80665	$\mathrm{m/s^2}$
Fallbeschleunigung (Näherung)	g	9.81	$\mathrm{m/s^2}$
Elektronenmasse	m_e	$9.109\,383\,7015(28) \cdot 10^{-31}$	kg
		0.51099895000(15)	MeV/c_0^2
Protonenmasse	m_p	$1.672\,621\,923\,69(51) \cdot 10^{-27}$	kg
		938.27208816(29)	MeV/c_0^2
Neutronenmasse	m_n	$1.674\,927\,498\,04(95) \cdot 10^{-27}$	kg
		939.56542052(54)	MeV/c_0^2
Deuterionenmasse	m_d	$3.343\,583\,7724(10) \cdot 10^{-27}$	kg
		1875.61294257(57)	MeV/c_0^2
Tritionenmasse	m_t	$5.007\,356\,7446(15) \cdot 10^{-27}$	kg
		2808.92113298(85)	MeV/c_0^2

A.3 Einheiten außerhalb des SI

Größe	Bezeichnung	Zeichen	Umrechnung
	Einheiten, die mit dem SI verwendet werden		
Zeit	Minute	min	1 min = 60 s
	Stunde	h	1 h = 60 min
	Tag	d	1 d = 24 h
ebener	Grad	°	1° = π rad/180
Winkel	Minute	'	1' = 1°/60
	Sekunde	"	1" = 1'/60
Fläche	Hektar	ha	1 ha = 10^4 m^2
Volumen	Liter	l, L	1 L = 1 l = 1 dm^3
Masse	Tonne	t	1 t = 1000 kg
	Dalton,	Da	1 Da = $1.660\,539\,066\,60(50) \cdot 10^{-27}$ kg
	(vereinheitlichte)		1 Da = $931.494\,102\,42(28)$ MeV/c_0^2
	atomare Masseneinheit	u	1 u = 1 Da
Energie	Elektronenvolt	eV	1 eV = $1.602\,176\,634 \cdot 10^{-19}$ J
	veraltete Einheiten		
Kraft	Kilopond	kp	1 kp = $g_n \cdot$ 1 kg = 9.80665 N
Leistung	Pferdestärke	PS	1 PS = 75 kpm/s = 735.49875 W
Druck	technische Atmosphäre	at	1 at = 1 kp/cm^2 = 98.0665 kPa
Absolutdruck	technische Atmosphäre absolut	ata	1 ata = 1 at
Überdruck	technische Atmosphäre über dem Bezugsniveau	atü	$\frac{p}{[\text{atü}]} = \frac{p}{[\text{ata}]} - 1$
	Einheiten, die in der Thermodynamik verwendet werden		
Normaldruck	physikalische Atmosphäre	atm	1 atm = 101.325 kPa
Wärmemenge	thermochemische Kalorie	cal_{th}	1 cal_{th} = 4.184 J
Temperatur	Grad Celsius	°C	$\frac{\vartheta}{[°\text{C}]} = \frac{T}{[\text{K}]} - 273.15$
	Grad Fahrenheit	°F	$\frac{\vartheta}{[°\text{F}]} = \frac{9}{5}\frac{\vartheta}{[°\text{C}]} + 32$
	Einheiten, die in der Nautik verwendet werden		
Geschw.	Knoten	kn	1 kn = 1 M/h
Länge	Seemeile	M, sm	1 M = 1852 m
	Einheiten, die im angloamerikanischen Einheitensystem verwendet werden		
Länge	*statute mile* (Meile)	mile, mi	1 mi = 1760 yd
	yard	yd	1 yd = 3 ft
	foot (Fuß)	ft, '	1 ft = 1' = 12"
	inch (Zoll)	in, "	1 in =1" = 2.54 cm
Volumen	*imperial gallon*	Imp.gal.	1 Imp.gal. = 4.54609 l
Masse	*pound* (Pfund)	lb	1 lb = 453.59237 g
	Einheiten, die im cgs und im Gaußschen cgs-Einheitensystem verwendet werden		
dynamische Viskosität	Poise	P	1 P = 0.1 Pas
kinematische Viskosität	Stokes	St	1 St = 10^{-4} m^2/s

A.4 Stoffwerte

Stoff	Größe		Zeichen	Zahlenwert	Einheit
		Feststoffe			
Aluminium	Wärmeausdehnungkoeffizent		α	$23.8 \cdot 10^{-6}$	1/K
Blei	volumenbezogene Masse		ρ	11.342	g/cm^3
Diamant	volumenbezogene Masse		ρ	3.52	g/cm^3
	Elastizitätsmodul		E	1035	kN/mm^2
Eis	volumenbezogene Masse		ρ	0.9167	g/cm^3
	spezifische Wärmekapazität		c	2.06	kJ/(kgK)
Eisen	spezifische Wärmekapazität		c	452	J/(kgK)
Gusseisen	volumenbezogene Masse		ρ	7.2	g/cm^3
	Elastizitätsmodul		E	100	kN/mm^2
Kochsalz	volumenbezogene Masse		ρ	2.17	g/cm^3
	Elastizitätsmodul		E	44	kN/mm^2
Messing	Wärmeausdehnungkoeffizent		α	$18 \cdot 10^{-6}$	1/K
Stahl	Wärmeleitfähigkeit		λ	14.5	W/(Km)
		Flüssigkeiten			
Benzin	volumenbezogene Masse		ρ	0.75	g/cm^3
	Heizwert		H	41	MJ/kg
Süsswasser	spezfische Wärmekapazität		c	4.18	kJ/(kgK)
	spezifische Schmelzwärme		q_s	332.5	kJ/kg
	Kompressionsmodul		K	2.08	kN/mm^2
	dynamische Viskosität	bei 20 °C	η	1.00	mPas
	volumenbezogene Masse	bei 20 °C	ρ	0.9983	g/cm^3
	volumenbezogene Masse	bei 25 °C	ρ	0.9970	g/cm^3
Seewasser	dynamische Viskosität	bei 15 °C	η	1.2231	mPas
	volumenbezogene Masse	bei 15 °C	ρ	1.0257	g/cm^3
		Gase			
Kohlendioxid	Binnendruck $\cdot V_m^2$		a	0.3637	Pam^6/mol^2
	Kovolumen		b	$42.7 \cdot 10^{-6}$	m^3/mol
Luft	volumenbezogene Masse		ρ	1.2041	kg/m^3
	Isentropenexponent		γ	1.38	–
	Schallgeschwindigkeit		c_S	343	m/s
Methan	volumenbezogene Masse		ρ	0.6596	kg/m^3
	molare Masse		M	16.04	g/mol
	spezifische Wärmekapazität bei isochorer Erwärmung		c_V	1.6975	kJ/(kgK)
	spezifische Wärmekapazität bei isobarer Erwärmung		c_p	2.2207	kJ/(kgK)
	Isentropenexponent		γ	1.31	–

Alle Stoffwerte für Gase beziehen sich auf physikalische Normalbedingungen ($p = 1$ atm und $\vartheta = 0$ °C)